Лицей към Софийски Университет
„Св. Климент Охридски“

ЗАДАЧИТЕ
и примерни решения

от конкурсния изпит по математика
за постъпване в НПМГ

22 Юни 2009 г.

Първи изпит на НПМГ с нов формат

НАЦИОНАЛНА ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ
„АКАД. ЛЮБОМИР ЧАКАЛОВ“
Лицей към СУ „Св. Климент Охридски“
София 1164, ул. Бигла 52, тел. 862 83 63, 862 29 66
e-mail: npmg@npmg.org, npmg_sofia@abv.bg, skype: npmg_sofia
http://www.npmg.org, http://mathnpmg.blogspot.com

Конкурсен изпит по математика
за НПМГ „Акад. Л. Чакалов“
22.06.2009 г.

Задача 1. Решете уравнението $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}\right)-(x-1)^3-3(x-1)(1+x)=1\frac{1}{27}$.

Задача 2. Намерете естественото число $A=\dfrac{41.21^{22}+123.7^{21}.9^{10}}{27^7.49^{10}+35.7^7.63^{11}}$ и проверете дали е решение на неравенството $\left(2-\frac{x}{3}\right)^2-\frac{x}{1,2}<\left(\frac{x}{3}+2\right)^2+3,5x+3$.

Задача 3. Решете уравнението $|ax-2-x|=4$, където a е параметър.

Задача 4. Родители на ученици от НПМГ решили да подарят на Гимназията компютри в 3 поредни дни. Първия ден подарили 30% от компютрите, втория ден — с 10% повече от подарените първия ден, а третия ден — с четири компютъра повече от подарените през втория ден. Намерете колко компютъра общо са подарени.

Задача 5. Сашо тръгнал от НПМГ за Общежитието и 30 минути по–късно забелязал, че е изминал половината от пътя и още 200 метра. Продължил да се движи със същата скорост и пристигнал в Общежитието след 24 минути. Намерете колко километра е разстоянието от НПМГ до Общежитието.

Задача 6. Даден е равнобедреният триъгълник ABC ($AC=BC$), в който $\sphericalangle BAC=80^\circ$. Точките M и N лежат съответно върху бедрата AC и BC така, че $\sphericalangle AMB=60^\circ$ и $\sphericalangle ANB=50^\circ$. Да се докаже, че правата BM е симетрала на отсечката AN.

Задача 7. Върху страните AD и CD на успоредника $ABCD$, с остър ъгъл при върха A, външно за него са построени квадратите $ADPQ$ и $CMND$. Да се докаже, че $BM\perp BQ$.

Задача 8. Даден е $\triangle ABC$, в който симетралата на страната BC пресича страната AB в точка M. Ако M е среда на AB, N е среда на BC и $MN=\frac{1}{4}AB$, намерете $\sphericalangle CAB$.

Задача 9. Дадени са два трапеца $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, за които е известно, че $CD=1$ см, $A_1B_1=5$ см, $C_1D_1=3$ см. Дължината на AB е четно число и $AB>A_1B_1$. Дължините на височините DH ($H\in AB$) и D_1H_1 ($H_1\in A_1B_1$) на двата трапеца са съответно 8 см и 15 см. Отношението на лицата $S_{A_1B_1C_1D_1}:S_{ABCD}$ е естествено число. Намерете дължината на AB.

Задача 10. Намерете всички двойки прости числа x и y, които удовлетворяват равенството $3x^4y+8x^4+18x^2y+48x^2+27y-1937=0$.

Време за работа: 4 астрономически часа

Пълното решение на всяка задача се оценява с 4 точки.
Комисията на НПМГ Ви пожелава успешна работа!

Задача 1. Решете уравнението $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}\right)-(x-1)^3-3(x-1)(1+x)=1\frac{1}{27}$.

Решение. Уравнението е еквивалентно на

$$x^3+1/27-(x^3-3x^2+3x-1)-3(x^2-1)=28/27$$

и след разкриване на скобите получаваме

$$x^3-x^3+3x^2-3x+1-3x^2+3=28/27-1/27=1.$$

След унищожаване на еднаквите едночлени получаваме $3x=3$, т.е. $x=1$.

За прилагането на всяка от трите формули се дава по една точка (**3 т.**) и за $x=1$ — **1 т.**

Задача 2. Намерете естественото число $A=\dfrac{41.21^{22}+123.7^{21}.9^{10}}{27^7.49^{10}+35.7^7.63^{11}}$ и проверете дали е решение на неравенството $\left(2-\dfrac{x}{3}\right)^2-\dfrac{x}{1,2}<\left(\dfrac{x}{3}+2\right)^2+3,5x+3$.

Решение.

$$A=\frac{41.21^{22}+123.7^{21}.9^{10}}{27^7.49^{10}+35.7^7.63^{11}}=\frac{41.3^{22}.7^{22}+3.41.7^{21}.3^{20}}{3^{21}.7^{20}+5.7.7^7.7^{11}.3^{22}}=\frac{41.3^{22}.7^{22}+41.3^{21}.7^{21}}{3^{21}.7^{20}+5.3^{22}.7^{19}}=$$
$$=\frac{41.3^{21}.7^{21}(3.7+1)}{3^{21}.7^{19}(7+5.3)}=41.7^2=2009.$$

Дават се следните точки:

- за прилагане на $(ab)^n=a^nb^n$ **0,5 т.**
- за прилагане на $(a^n)^m=a^{nm}$ **0,5 т.**
- за изнасяне на общ множител **0,5 т.**
- за отговор **0,5 т.**

Извършваме еквивалентните преобразувания

$$4-\frac{4x}{3}+\frac{x^2}{9}-\frac{10x}{12}<\frac{x^2}{9}+\frac{4x}{3}+4+\frac{35x}{10}+3$$
$$-\frac{4x}{3}-\frac{5x}{6}-\frac{4x}{3}-\frac{7x}{2}<3,\quad \frac{-8x-5x-8x-21x}{6}<3$$
$$-\frac{42x}{6}<3,\quad x>-\frac{3}{7},\quad x\in\left(-\frac{3}{7};\infty\right).$$

Следователно числото $A=2009$ е решение на неравенството.

Дават се следните точки:

- за прилагане на формулите за съкратено умножение **0,5 т.**
- за привеждане под общ знаменател **0,5 т.**
- за $x>-\dfrac{3}{7}$ **0,5 т.**
- за отговор **0,5 т.**

Задача 3. Решете уравнението $|ax - 2 - x| = 4$, където a е параметър.

Решение. Уравнението има два случая:

I сл. $ax - 2 - x = 4$

$(a-1)x = 6$

1) при $a = 1$ $\quad 0.x = 6$ — няма решение

2) при $a \neq 1$ $\quad x = \dfrac{6}{a-1}$

II сл. $ax - 2 - x = -4.$

$(a-1)x = -2$

1) при $a = 1$ $\quad 0.x = -2$ — няма решение

2) при $a \neq 1$ $\quad x = -\dfrac{2}{a-1}$

Отговор:

при $a = 1$ даденото уравнение няма решение;

при $a \neq 1$, $x_1 = \dfrac{6}{a-1}$, $x_2 = -\dfrac{2}{a-1}$.

Дават се следните точки:

- за разглеждането на двата случая на задачата (за разкриване на модула) по **0,75 т.** **1,5 т.**
- за решаването на всеки от двата случая по **1 т.** **2 т.**
- за отговор (обобщение) **0,5 т.**

Задача 4. Родители на ученици от НПМГ решили да подарят на Гимназията компютри в 3 поредни дни. Първия ден подарили 30% от компютрите, втория ден — с 10% повече от подарените първия ден, а третия ден — с четири компютъра повече от подарените през втория ден. Намерете колко компютъра общо са подарени.

Решение. Нека общият брой на подарените компютри е x, където x е естествено число. **0,5 т.**

Тогава даренията са направени по следния начин:

I ден: $\dfrac{30x}{100}$ **0,5 т.** II ден: $\dfrac{30x}{100} + \dfrac{10}{100} \cdot \dfrac{30x}{100} = \dfrac{33x}{100}$ **0,5 т.** III ден: $\dfrac{33x}{100} + 4.$ **0,5 т.**

Тъй като общия брой е x, можем да съставим уравнението:

$$\frac{30x}{100} + \frac{33x}{100} + \frac{33x}{100} + 4 = x.$$ **1 т.**

Привеждаме под общ знаменател и получаваме:

$30x + 33x + 33x + 400 = 100x, \quad 4x = 400, \quad x = 100.$ **1 т.**

Задача 5. Сашо тръгнал от НПМГ за Общежитието и 30 минути по–късно забелязал, че е изминал половината от пътя и още 200 метра. Продължил да се движи със същата скорост и пристигнал в Общежитието след 24 минути. Намерете колко километра е разстоянието от НПМГ до Общежитието.

Решение. Нека разстоянието от НПМГ до Общежитието е $2x$ м. Можем да съставим следната таблица:

t	V	S
30	$(x+200)/30$	$x+200$
24	$(x+200)/30$	$24.(x+200)/30$

Съставяме уравнение за изминатия път:

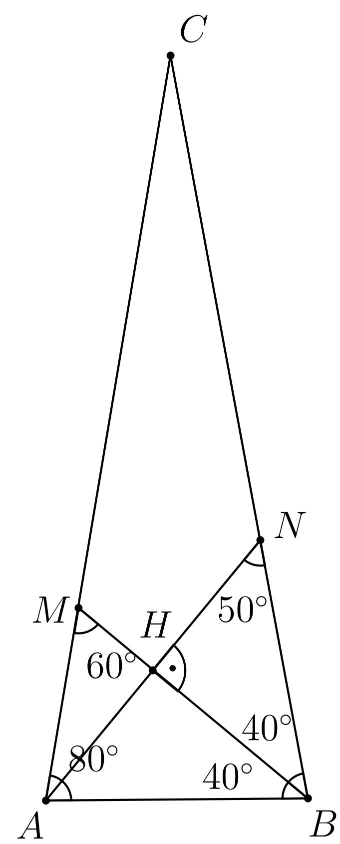
$$(x+200)+24\cdot\frac{x+200}{30}=2x, \qquad x+200+4\cdot\frac{x+200}{5}=2x$$

Привеждаме под общ знаменател и получаваме: $5x+1000+4x+800=10x$, $x=1800$. Следователно разстоянието от НПМГ до Общежитието е $2x=3600$ м. $=3,6$ км.

Дават се следните точки:

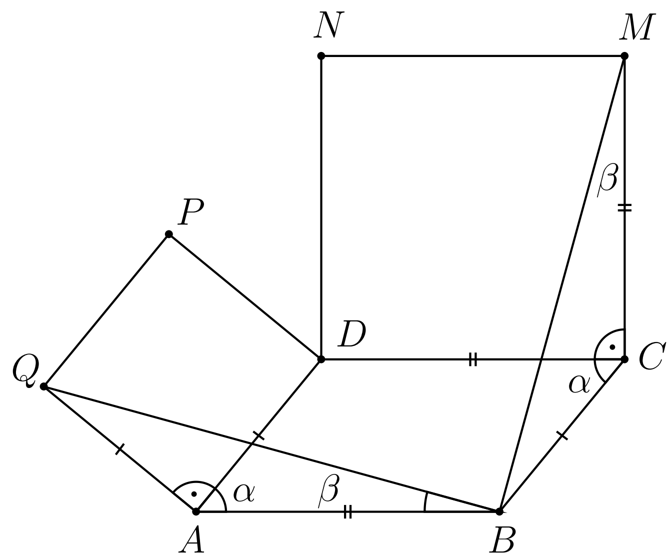
- за съставяне на уравнение **2 т.**
- за решаване на уравнението **1 т.**
- за отговор **1 т.**

Задача 6. Даден е равнобедреният триъгълник ABC ($AC=BC$), в който $\sphericalangle BAC=80^\circ$. Точките M и N лежат съответно върху бедрата AC и BC така, че $\sphericalangle AMB=60^\circ$ и $\sphericalangle ANB=50^\circ$. Да се докаже, че правата BM е симетрала на отсечката AN.



Решение. $\triangle ABC$ е равнобедрен, следователно $\sphericalangle BAC=\sphericalangle ABC=80^\circ$. От Теоремата за сбор на ъгли в $\triangle ABM$ следва, че $\sphericalangle ABM=40^\circ$, **1 т.**
тогава $\sphericalangle MBN=40^\circ$. Следователно от Теоремата за сбор на ъгли в $\triangle BHN$ следва, че $\sphericalangle BHN=90^\circ$, където $H=AN\cap BM$. **1 т.**
$\triangle ABN$ е равнобедрен ($\sphericalangle NAB=\sphericalangle ANB=50^\circ$), **1 т.**
а BH е ъглополовяща и височина, следователно е и медиана. Следователно BM е симетрала на AN. **1 т.**

Задача 7. Върху страните AD и CD на успоредника $ABCD$, с остър ъгъл при върха A, външно за него са построени квадратите $ADPQ$ и $CMND$. Да се докаже, че $BM \perp BQ$.



Решение. $ABCD$ е успоредник, следователно $AB = CD$, $AD = BC$, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = \alpha$ (срещулежащи ъгли в успоредника) и $\sphericalangle ABC = 180^\circ - \alpha$. Тъй като $ADPQ$ е квадрат, следва че $AD = AQ$ и $\sphericalangle DAQ = 90^\circ$. Тъй като $CMND$ е квадрат, следва че $CD = CM$ и $\sphericalangle DCM = 90^\circ$. **1 т.**

Разглеждаме $\triangle ABQ$ и $\triangle CMB$.

1) $AB = CM$ — доказано

2) $AQ = CB$ — доказано

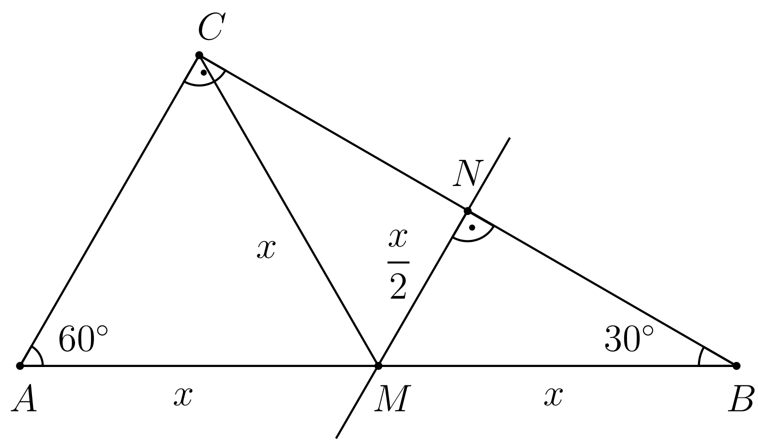
3) $\sphericalangle BAQ = \sphericalangle MCB = 90^\circ + \alpha$ — доказано.

По първи признак за еднаквост на триъгълници, следва че $\triangle ABQ \cong \triangle CMB$. **1 т.**

Следователно $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle CMB = \beta$ и от Теоремата за сбор на ъглите в $\triangle BCM$, следва че $\sphericalangle MBC = 180^\circ - 90^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ - \alpha - \beta$. **1 т.**

$\sphericalangle QBM = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABQ - \sphericalangle MBC = (180^\circ - \alpha) - \beta - (90^\circ - \alpha - \beta) = 90^\circ$, следователно $BM \perp BQ$. **1 т.**

Задача 8. Даден е $\triangle ABC$, в който симетралата на страната BC пресича страната AB в точка M. Ако M е среда на AB, N е среда на BC и $MN = \frac{1}{4}AB$, намерете $\sphericalangle CAB$.



Решение. Нека $AB = 2x$, тогава $AM = x$, $BM = x$ и $MN = \frac{1}{4}AB = \frac{x}{2}$. Тъй като MN е симетрала, следва че $\sphericalangle MNB = 90^\circ$. **1 т.**

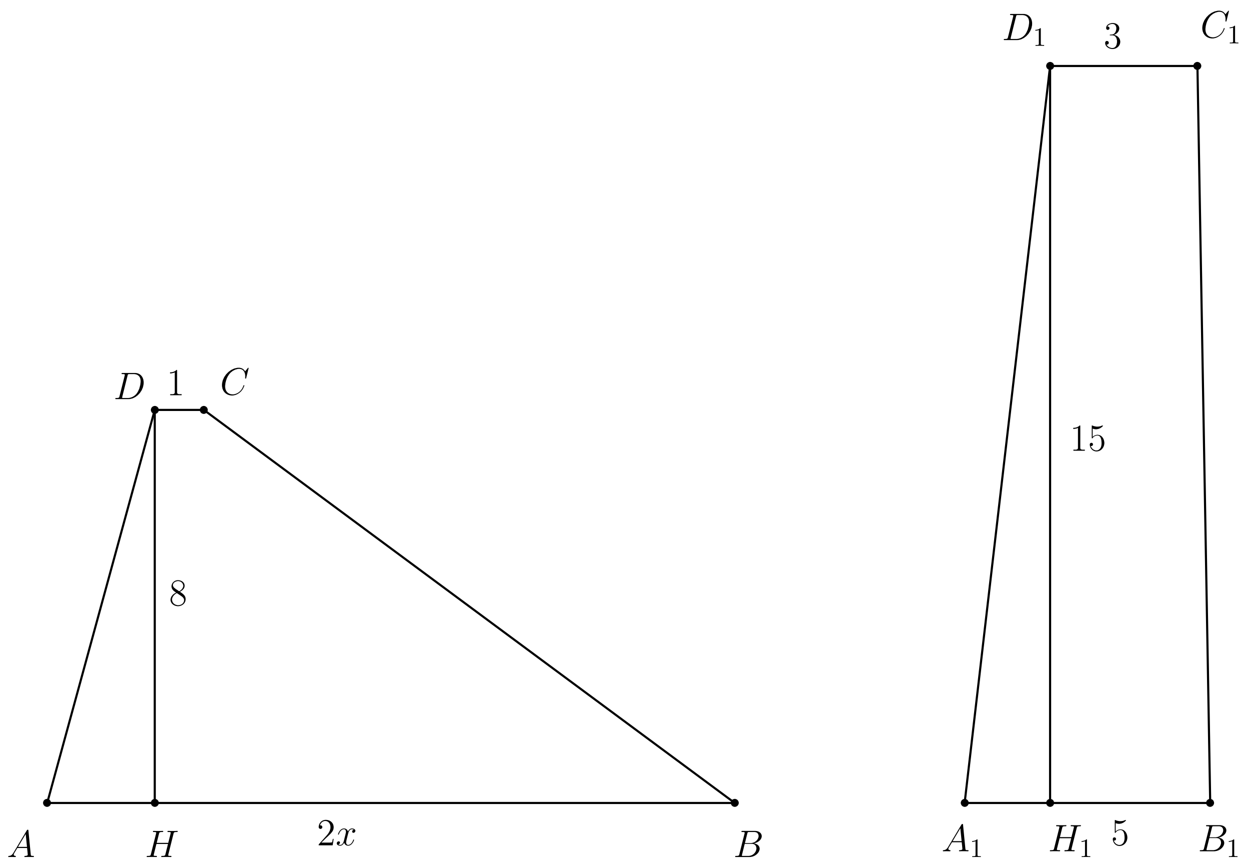
Тогава в правоъгълния $\triangle MBN$ катетът MN е половината от хипотенузата MB: $MN = \frac{1}{2}MB$, следователно $\sphericalangle MBN = 30^\circ$. **1 т.**

Тъй като MN е симетрала, следва че $MB = MC = x$. **1 т.**

Тогава за $\triangle ABC$ получихме, че $CM = AM = MB$, следователно $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

От Теоремата за сбор на ъгли в $\triangle ABC$, следва че $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. **1 т.**

Задача 9. Дадени са два трапеца $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, за които е известно, че $CD = 1$ см, $A_1B_1 = 5$ см, $C_1D_1 = 3$ см. Дължината на AB е четно число и $AB > A_1B_1$. Дължините на височините DH $(H \in AB)$ и D_1H_1 $(H_1 \in A_1B_1)$ на двата трапеца са съответно 8 см и 15 см. Отношението на лицата $S_{A_1B_1C_1D_1} : S_{ABCD}$ е естествено число. Намерете дължината на AB.



Решение. Щом дължината на AB е четно число, то AB е от вида $2x$, където x е естествено число. Тъй като $AB > A_1B_1$, то $2x > 5$, следователно $x \geqq 3$. **1 т.**

$S_{A_1B_1C_1D_1} = (5+3).15/2 = 60$ см^2.

$S_{ABCD} = (2x+1).8/2 = 4(2x+1)$ **1 т.**

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = \frac{60}{4(2x+1)} = \frac{15}{2x+1} \text{ е естествено число.}$$

Тогава $2x+1$ може да бъде равно само на 1, 3, 5 или 15, **1 т.**

т.е. x може да бъде равно само на $0, 1, 2$ или 7. Тъй като $x \geqq 3$, то $x = 7$. Следователно дължината на $AB = 2x = 14$ см. **1 т.**

Задача 10. Намерете всички двойки прости числа x и y, които удовлетворяват равенството $3x^4y + 8x^4 + 18x^2y + 48x^2 + 27y - 1937 = 0$.

Решение. Забелязваме, че ако групираме събираемите по двойки и изнесем общ множител пред скоби, то в скобите ще остане израза $3y+8$. За да получим $3y+8$ и в последната двойка, то трябва да представим числото -1937 като $72 - 2009$.

$$3x^4y+8x^4+18x^2y+48x^2+27y-1937 = x^4(3y+8)+6x^2(3y+8)+9(3y+8)-2009 = 0.$$

1 т.

Тъй като числото 2009 не участва в разлагането го прехвърляме в дясната страна на равенството, разлагаме лявата страна на равенството на множители и получаваме: $(3y + 8)(x^4 + 6x^2 + 9) = (3y + 8)(x^2 + 3)^2 = 2009$. **1 т.**

Тъй като x и y са прости числа, то $3y + 8 \geqq 3.2 + 8 = 14$ и $x^2 + 3 \geqq 2^2 + 3 = 7$.

Тогава единственото разлагане на 2009 е $7.7.41 = 7^2.41$. **1 т.**

Тъй като 41 не е квадрат на естествено число, то $41 = 3y + 8$, а $x^2 + 3 = 7$.

След пресмятане, получаваме $x = 2$ и $y = 11$. **1 т.**